

De la mecánica clásica y las leyes de Kirchhoff a los sistemas hamiltonianos con puertos

por

Carles Batlle y Arnau Dòria-Cerezo

INTRODUCCIÓN

La última década ha contemplado el desarrollo de un marco geométrico para el modelado, simulación y control de sistemas físicos, basado en la combinación de ideas y técnicas provenientes de la teoría de sistemas mecánicos hamiltonianos y de la teoría de redes. El enfoque hamiltoniano tiene sus raíces en la mecánica clásica [1], mientras que los conceptos de la teoría de redes tienen su origen en la ingeniería eléctrica, y constituyen una piedra angular de la teoría matemática de sistemas. Aunque una buena parte del análisis de sistemas físicos se ha realizado dentro del marco hamiltoniano, los conceptos de la teoría de redes son predominantes cuando se trata de modelar y simular sistemas físicos complejos.

La síntesis de ambos cuerpos de conocimiento, que se ha denominado teoría de sistemas hamiltonianos con puertos (PHS - *port-Hamiltonian systems*), permite tratar de manera unificada sistemas compuestos por subsistemas dispares procedentes de diversos dominios físicos. La formulación PHS, además de facilitar el análisis y la simulación de sistemas complejos, proporciona una vía natural de control, basada en conceptos de pasividad que tiene, bajo ciertas circunstancias, una interpretación física atractiva.

En este artículo exponemos los orígenes conceptuales de la teoría PHS, empezando por las leyes de Kirchhoff y enlazando con las ecuaciones de la mecánica clásica, para acabar con la estructura geométrica subyacente a todo el formalismo, conocida como estructura de Dirac, y con los métodos de control asociados. Concluimos con un apunte de las generalizaciones y desarrollos más recientes.

Las estructuras de Dirac fueron consideradas primero en [6] y [8] como estructuras geométricas más generales que las estructuras simplécticas y de Poisson, y a lo largo de la década de 1990 se usaron para caracterizar la interconexión de sistemas físicos abiertos, y describir en formalismo hamiltoniano los sistemas con ligaduras que aparecen de forma natural en la interconexión [25, 7]. Los algoritmos de control asociados se desarrollaron a partir de las técnicas usadas para sistemas pasivos (véase [24] y [16]), desembocando en las técnicas denominadas IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment – Passivity-Based Control*) [22, 23]. El concepto de pasividad, que caracteriza los sistemas físicos o de control de los cuales sólo se puede extraer una cantidad finita de energía, ha jugado un papel fundamental durante las

últimas décadas en la teoría de sistemas y de control. Los PHS, y su generalización, los PHS con disipación, constituyen a este respecto una clase cerrada, de manera que la interconexión de sistemas PHS mediante estructuras de Dirac resulta en un nuevo PHS, y por lo tanto en un sistema pasivo; este hecho se aprovecha en el denominado control de PHS por interconexión [22], aunque nosotros sólo presentaremos, sin demasiados detalles por una cuestión de espacio, la técnica IDA-PBC, un caso particular de la cual se puede interpretar en el marco mencionado.

Cabe indicar finalmente que las estructuras de Dirac y la teoría de PHS pueden considerarse como una formulación matemática [12] de lo que se conoce como teoría de grafos de ligadura (*bond graphs*) [14], un lenguaje de modelado de sistemas usado en numerosas ramas de la ingeniería y especialmente en aquéllas que combinan diversos dominios físicos, como la mecatrónica.

Notaciones como $\partial_x H$ indican el vector fila asociado al gradiente de una función escalar $H(x)$, y $\partial_x H^T$ es el correspondiente vector traspuesto.

1. LEYES DE KIRCHHOFF Y TEOREMA DE TELLEGEN

Las dos leyes de Kirchhoff constituyen la parte *topológica* de la teoría de circuitos, en el sentido de que sólo dependen de cómo las ramas del circuito están comunicadas entre sí y no de los elementos contenidos en las ramas. La ley de Kirchhoff de corrientes (KCL) expresa la conservación de la carga eléctrica, mientras que la ley de Kirchhoff de voltajes (KVL) es consecuencia de que el campo electrostático sea conservativo.

La estructura topológica de un circuito eléctrico se puede caracterizar mediante un grafo, las aristas del cual representan las ramas del circuito. Por cada rama circula una corriente eléctrica a la que se asigna arbitrariamente un sentido positivo, el cual induce una orientación de las aristas del grafo, obteniéndose así un grafo dirigido. Sea \mathcal{N} el conjunto de los n vértices del grafo, correspondientes a los nodos del circuito, y \mathcal{B} el de las b aristas (ramas). A cada rama se le asigna una diferencia de potencial (o voltaje) v^j y una corriente i_j , $j = 1, \dots, b$, y a cada nodo un potencial u^α , $\alpha = 1, \dots, n$. El sentido positivo de la corriente define la orientación de la rama, y la diferencia de potencial entre dos nodos es la diferencia de los potenciales de nodo, definida en el sentido contrario¹ al marcado por la orientación, tal como ilustra la Figura 1, donde $v^j = u^\alpha - u^\beta$.

La estructura del grafo queda completamente definida mediante la matriz de incidencia D , que indica cuáles son los nodos conectados por una determinada rama, y con qué orientación. Se trata de una matriz $n \times b$, cuyos elementos d_α^j están definidos por

$$d_\alpha^j = \begin{cases} +1, & \text{si la rama } j \text{ parte del nodo } \alpha, \\ -1, & \text{si la rama } j \text{ llega al nodo } \alpha, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

¹Esta orientación permite eliminar signos que, de otra manera, aparecerían en las ecuaciones que relacionan v con i en cada rama.

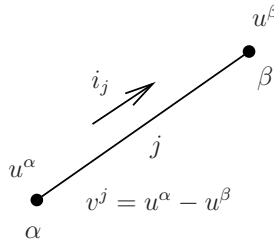


Figura 1: Definición de variables en un grafo dirigido correspondiente a un circuito eléctrico. El sentido positivo de la corriente orienta la rama, de manera que la rama j parte del nodo α y llega al nodo β .

En el grafo asociado a un circuito, dos nodos dados pueden estar conectados por más de una rama, con la misma o distinta orientación, pero el nodo de salida y de llegada de una rama deben ser distintos.

En términos de la matriz de incidencia, la ley de Kirchhoff de corrientes puede formularse, para cada uno de los nodos, como

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} d_{\alpha}^j i_j = 0, \quad \alpha \in \mathcal{N}, \quad (2)$$

ya que sólo contribuyen a la suma aquellas ramas que parten o llegan al nodo α , y con el signo adecuado, obteniéndose que la suma total de corrientes orientadas en un nodo es cero, es decir, la conservación de la carga eléctrica. En notación matricial, con i el vector columna con elementos i_j ,

$$Di = 0. \quad (3)$$

Por su parte, la ley de Kirchhoff de voltajes, consecuencia del carácter conservativo del campo electrostático, establece que el potencial eléctrico en un nodo está bien definido una vez se ha asignado un valor arbitrario al potencial de uno de ellos. Es fácil ver que esto es equivalente a la relación entre los potenciales de nodo y las diferencias de potencial en las ramas. En términos de los elementos de D ,

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} d_{\gamma}^j u^{\gamma} = v^j, \quad j \in \mathcal{B}, \quad (4)$$

ya que, para cada rama j , sólo contribuyen a la suma los dos nodos conectados por ella, y se obtiene la relación $v^j = u^{\alpha} - u^{\beta}$ de la Figura 1. Matricialmente

$$D^T u = v, \quad (5)$$

donde u y v son vectores columna con elementos u^{α} y v^j , respectivamente.

KCL y KVL se pueden formular en términos de la aplicación lineal asociada a D y de su dual:

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{D}^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^b, \quad (6)$$

con matrices D y D^T respectivamente, de manera que las leyes de Kirchhoff se pueden escribir, haciendo referencia sólo a las variables de rama, como

$$(KCL) \Leftrightarrow i \in \text{Ker } D, \quad (KVL) \Leftrightarrow v \in \text{Im } D^*. \quad (7)$$

Dado un grafo dirigido asociado a un circuito, es decir, dada la matriz de incidencia, un conjunto de corrientes i_j (respectivamente diferencias de potencial v^j) que satisfaga KCL (respectivamente KVL) se denomina *admisible*. Las corrientes y voltajes admisibles de un determinado circuito satisfacen el denominado teorema de Tellegen, que es un caso particular de un resultado más general de la teoría de estructuras de Dirac que será presentada en la sección siguiente.

TEOREMA DE TELLEGEN. *Sea un circuito eléctrico con matriz de incidencia D y sean i y v corrientes y voltajes admisibles del mismo. Entonces*

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} v^j i_j = 0. \quad (8)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} v^j i_j = v^T i \stackrel{(KVL)}{=} (D^T u)^T i = u^T D i \stackrel{(KCL)}{=} u^T 0 = 0. \quad \square$$

El teorema establece que la suma total de las potencias eléctricas (los productos de corriente y voltaje) que entran o salen de las ramas de un circuito es nula. Los elementos en las ramas pueden ser de cualquier tipo, incluyendo fuentes, elementos resistivos y elementos almacenadores de energía (condensadores e inductores), y pueden ser lineales o no. Las leyes de Kirchhoff establecen unas relaciones entre voltajes y corrientes de manera que la energía se conserva en el proceso de intercambio de la misma entre las ramas del circuito.

2. LA GEOMETRÍA DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF: ESTRUCTURAS DE DIRAC

Las leyes de Kirchhoff son un caso particular de las estructuras de Dirac, las cuales identifican la clase general de relaciones lineales que satisfacen relaciones tipo Tellegen.

Sea \mathcal{F} un espacio vectorial de dimensión n , que denominaremos *espacio de flujos*, y sea $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$ su dual, llamado *espacio de esfuerzos*.² El espacio $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ se denomina *espacio de puertos* y la *potencia* asociada a un elemento $(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ se define como la actuación de e sobre f ,

$$P(f, e) = \langle e | f \rangle = e(f) = f(e) = e^T f = f^T e, \quad (9)$$

en donde hemos empleado diversas notaciones e isomorfismos.

²La nomenclatura proviene de la teoría de *bond graph* [14].

DEFINICIÓN. Una *estructura de Dirac* en $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ es un subespacio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ tal que

(D1) $\langle e|f \rangle = 0$, para todo $(e, f) \in \mathcal{D}$,

(D2) $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F}$.

Por ejemplo, en $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, se tiene $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4$ y los siguientes subespacios son todos estructuras de Dirac:

1. $\mathcal{D}_1 = \langle (1, 0; 0, 1), (0, 1; -1, 0) \rangle$. Los elementos $(f, e) \in \mathcal{D}_1$ son de la forma $f = (\alpha, \beta)$, $e = (-\beta, \alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}_2 = \langle (1, 0; 0, 1), (1, 0; 0, -1) \rangle$. Si $(f, e) \in \mathcal{D}_2$, entonces $f = (\alpha + \beta, 0)$, $e = (0, \alpha - \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \langle (1, 0; 0, 0), (0, 1; 0, 0) \rangle$. En este caso, si $(f, e) \in \mathcal{D}_1$, $f = (\alpha, \beta)$, $e = (0, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Estos ejemplos ilustran que los subespacios de \mathcal{F} y \mathcal{E} inducidos por \mathcal{P} pueden ser de dimensiones arbitrarias entre 0 y $\dim \mathcal{F}$, y que \mathcal{D} no es necesariamente de la forma $V \times V^*$, con V un subespacio de \mathcal{F} .

Daremos a continuación una definición equivalente que además permite la generalización a dimensión infinita. En $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ existe una forma bilineal canónica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ dada por

$$\langle\langle (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \rangle\rangle = \langle e|\tilde{f} \rangle + \langle \tilde{e}|f \rangle, \quad \forall (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}. \quad (10)$$

Esta forma no es definida, dado que $\langle\langle (f, e), (f, e) \rangle\rangle = 2\langle e|f \rangle$ puede tener cualquier signo, pero es no degenerada, ya que es fácil ver que si $\langle\langle (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \rangle\rangle = 0$ para todo \tilde{f}, \tilde{e} , entonces poniendo $\tilde{f} = 0$ se obtiene primero $f = 0$, y a continuación $e = 0$.

PROPOSICIÓN. Una *estructura de Dirac* en $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ es un subespacio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ tal que

(D3) $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$,

donde \mathcal{D}^\perp es el complemento ortogonal de \mathcal{D} respecto a $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ en \mathcal{P} :

$$\mathcal{D}^\perp = \{(f, e) \in \mathcal{P} \mid \langle\langle (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \rangle\rangle = 0 \quad \forall (\tilde{f}, \tilde{e}) \in \mathcal{D}\}. \quad (11)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero (D3). Si $(f, e) \in \mathcal{D}$, entonces $(f, e) \in \mathcal{D}^\perp$ y, por lo tanto,

$$0 = \langle\langle (f, e), (f, e) \rangle\rangle = 2\langle e|f \rangle$$

y tenemos (D1). Además, la no degeneración de la forma bilineal implica que

$$\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \mathcal{P} - \dim \mathcal{D} = 2 \dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{D} \stackrel{(D3)}{=} 2 \dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{D}^\perp,$$

de donde $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \mathcal{F}$ y, por (D3) de nuevo, $\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F}$, es decir, (D2).

Supongamos ahora (D1) y (D2), y sean $(f, e), (\tilde{f}, \tilde{e})$ elementos de \mathcal{D} . Entonces $(f + \tilde{f}, e + \tilde{e}) \in \mathcal{D}$ por ser \mathcal{D} un subespacio y

$$0 \stackrel{(D1)}{=} \langle e + \tilde{e} | f + \tilde{f} \rangle = \langle e | f \rangle + \langle e | \tilde{f} \rangle + \langle \tilde{e} | f \rangle + \langle \tilde{e} | \tilde{f} \rangle \stackrel{(D1)}{=} \langle e | \tilde{f} \rangle + \langle \tilde{e} | f \rangle = \langle \langle (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \rangle \rangle.$$

Fijado $(f, e) \in \mathcal{D}$ tenemos por lo tanto que $\langle \langle (f, e), (\tilde{f}, \tilde{e}) \rangle \rangle = 0$ para todo $(\tilde{f}, \tilde{e}) \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\perp$. Además, usando (D2) y la no degeneración de $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$,

$$\dim \mathcal{D}^\perp = 2 \dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{D} \stackrel{(D2)}{=} \dim \mathcal{D},$$

y por lo tanto $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{D}$, es decir, (D3). \square

De la demostración precedente se deduce que (D1) implica por sí sola que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\perp$. Dado que, por la no degeneración, $\dim \mathcal{D}^\perp = 2 \dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{D}$, se tiene entonces que cualquier subespacio de $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ que satisfaga (D1), sea o no estructura de Dirac, tiene la propiedad de que $\dim \mathcal{D} \leq \dim \mathcal{D}^\perp = 2 \dim \mathcal{F} - \dim \mathcal{D}$, de donde $\dim \mathcal{D} \leq \dim \mathcal{F}$. Por lo tanto, una estructura de Dirac es un subespacio de dimensión máxima de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ que satisface (D1).

Una de las realizaciones más importantes de una estructura de Dirac es la denominada de núcleo, que se describe a continuación. Otras realizaciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [7]. Sea W un espacio vectorial y sean $E : \mathcal{E} \rightarrow W$ y $F : \mathcal{F} \rightarrow W$ aplicaciones lineales tales que

(D4) $FE^* + EF^* = 0$, o en términos de matrices asociadas, para las que utilizamos la misma notación, $FE^T + EF^T = 0$,

(D5) $\dim \text{Im}(F + E) = \dim \mathcal{F}$, o en notación de matrices, $\text{rang}(F|E) = \dim \mathcal{F}$.

Entonces

$$\text{Ker}(F + E) = \{(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid Ff + Ee = 0\} \quad (12)$$

es una estructura de Dirac. De hecho, toda estructura de Dirac admite una representación de núcleo.

Como se ha indicado previamente, las leyes de Kirchhoff constituyen un caso particular de estructura de Dirac. En este caso el espacio de flujos \mathcal{F} es el espacio vectorial de corrientes de rama, $\mathcal{F} = \mathbb{R}^b$, y su dual $\mathcal{E} = \mathbb{R}^b$ es el espacio de voltajes. El subespacio de la estructura de Dirac está constituido por las corrientes y los voltajes admisibles. En términos de la matriz de incidencia D ,

$$\mathcal{D} = \{(i, v) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \mid Di = 0, v = D^T \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^n\}. \quad (13)$$

Es interesante en este caso ver la demostración y cómo puede obtenerse la representación de núcleo asociada. Si $(i, v) \in \mathcal{D}$, $\langle v | i \rangle = \langle D^T \lambda | i \rangle = \langle \lambda | Di \rangle = 0$ y se tiene (D1). Para ver (D2), consideremos D como aplicación lineal de \mathbb{R}^b en \mathbb{R}^n . Entonces $\dim \text{Ker } D + \dim \text{Im } D = b$, pero $\dim \text{Im } D = \text{rang } D = \text{rang } D^T = \dim \text{Im } D^T$, y por lo tanto

$$\dim \text{Ker } D + \dim \text{Im } D^T = b = \dim \mathcal{F}, \quad (14)$$

con lo que tenemos (D2). La obtención de E y F puede hacerse de la siguiente manera. En primer lugar, es fácil ver que la matriz $n \times b$ de incidencia D tiene un máximo de $n - 1$ filas independientes, dado que la suma de los elementos de cualquier columna da cero. De hecho, se puede demostrar que $\dim \text{Ker } D = b - (n - 1)$. Si B es una matriz formada a partir de $n - 1$ filas cualesquiera de D , entonces (KCL) es equivalente a $Bi = 0$. De (14) se deduce entonces que $\dim \text{Im } D^T = n - 1$, por lo que el número de relaciones independientes satisfechas por los v que cumplen (KVL) es $b - (n - 1)$. Si $\alpha \in \text{Ker } D$ se tiene que $\alpha^T v = \alpha^T D^T \lambda = (D\alpha)^T \lambda = 0$ y, por lo tanto, los v de (KVL) son aniquilados por los vectores de $\text{Ker } D$, precisamente las corrientes que satisfacen (KCL), de las cuales hay $b - (n - 1)$ independientes, con las que podemos formar una matriz N de dimensiones $b \times (b - (n - 1))$. Una caracterización equivalente de (KVL) es entonces³ $N^T v = 0$, y a partir de aquí es inmediato construir la representación de núcleo como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0_{(b-(n-1)) \times b} \\ B_{(n-1) \times b} \end{pmatrix}}_F i + \underbrace{\begin{pmatrix} N_{(b-(n-1)) \times b}^T \\ 0_{(n-1) \times b} \end{pmatrix}}_E v = 0. \quad (15)$$

La condición (D4) se sigue entonces de $BN = 0$ (ya que $DN = 0$), y (D5) de la construcción de B y N y de (14).

Esta representación de núcleo no es la única posible para un circuito; de hecho, cualquier permutación de las variables de puerto define unas nuevas E y F que satisfacen igualmente (D4) y (D5). El que una forma sea más conveniente que otra depende de los elementos que se sitúen en las ramas; en particular, una elección acertada puede producir un sistema explícito de ecuaciones diferenciales, cuando ello es posible (véase [18]).

3. SISTEMAS HAMILTONIANOS CON PUERTOS

Tal como ya se ha mencionado, los enfoques hamiltonianos arrancan históricamente del estudio de las ecuaciones de la mecánica clásica. En esta sección recordamos brevemente algunos resultados elementales, caracterizamos los sistemas mecánicos pasivos y exponemos algunas limitaciones del formalismo resultante en lo que respecta a su utilización en otros dominios físicos, como por ejemplo el eléctrico. Ello lleva a formular una primera generalización, siguiendo el hilo conductor de la pasividad, obteniéndose los PHS explícitos con disipación, y finalmente a proponer los sistemas PHS generalizados, que en general son sistemas algebraico-diferenciales, es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales con ligaduras entre las variables de estado, la formulación de los cuales puede hacerse muy elegantemente empleando las estructuras de Dirac.

³Esta forma corresponde a la más conocida de suma de voltajes sobre caminos cerrados.

3.1. DE LOS SISTEMAS HAMILTONIANOS A LOS PHS

Sea un sistema mecánico con coordenadas generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$ y Lagrangiano $L(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$, y sometido además a fuerzas generalizadas externas $\tau \in \mathbb{R}^n$. Si el determinante

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}} \right| \neq 0, \quad (16)$$

es bien sabido que las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (17)$$

pueden reescribirse en forma hamiltoniana

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \tau_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

con

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (19)$$

y

$$H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}), \quad (20)$$

donde \dot{q} en el miembro derecho de (20) se entiende expresada como una función de q y p a partir de (19), substitución que es posible debido a (16).

Un cálculo trivial muestra que $\dot{H} = \tau^T \dot{q}$, que establece que el ritmo temporal de variación de la energía del sistema es igual a la potencia (fuerza por velocidad) inyectada en el mismo o, en forma integral,

$$H(t) - H(t_0) = \int_{t_0}^t \tau^T(s) \dot{q}(s) ds. \quad (21)$$

Si la energía está acotada inferiormente, $H \geq \alpha \in \mathbb{R}$, es inmediato obtener, usando la acotación para el término $H(t)$,

$$H(t_0) - \alpha \geq - \int_{t_0}^t \tau^T(s) \dot{q}(s) ds. \quad (22)$$

La integral en esta desigualdad es la energía aportada al sistema entre t_0 y t , por lo que el miembro de la derecha, con el signo negativo, es la energía *extraída* del sistema por la fuerza externa; (22) indica entonces que la energía total que se puede extraer del sistema está acotada superiormente por $H(t_0) - \alpha$. Podemos interpretar (18) como un sistema al que se proporciona $\tau(t)$ y, a partir de unas condiciones iniciales, se calculan $q(t)$, $p(t)$ y, finalmente $\dot{q}(t)$, la variable conjugada de potencia de $\tau(t)$. La acotación superior de la energía que se puede extraer del sistema define el concepto de *pasividad*: se dice entonces que el par (τ, \dot{q}) es pasivo, con función de almacenamiento H .⁴ Esta caracterización jugará un papel importante en el control

⁴La pasividad no está, sin embargo, ligada exclusivamente al formalismo hamiltoniano. Por ejemplo, en [21] se discute el concepto desde el punto de vista lagrangiano.

de sistemas físicos, pero antes cabe preguntarse si la formulación hamiltoniana tal como se ha presentado es adecuada para sistemas no mecánicos y, más en general, para describir interconexiones de sistemas abiertos. Las ecuaciones (18) pueden reescribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \partial_q H^T \\ \partial_p H^T \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1_{n \times 1} \end{pmatrix}}_G \tau, \quad (23)$$

y cabe observar que la variable conjugada de potencia de τ , la velocidad \dot{q} , puede obtenerse como

$$\dot{q} = G^T \begin{pmatrix} \partial_q H^T \\ \partial_p H^T \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Aunque existen razones puramente matemáticas para considerar diversas generalizaciones de la estructura subyacente a (23) y (24), cabe considerar también argumentos de tipo físico. En primer lugar, el número de variables de estado en (23) es par, dado que existe una p_i por cada q_i . Ello se debe al carácter de segundo orden de las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema mecánico considerado, y está claro que no puede mantenerse si se quiere extender la formulación, por ejemplo, a la teoría de circuitos, donde no hay restricción en el número de variables de estado.

La segunda limitación importante de (23) y (24) radica en la falta de simetría entre q y p , dado que sólo la ecuación de p se ve directamente afectada por la fuerza externa. Estas y otras razones llevan a formular la generalización de (23) y (24) conocida como PHS explícito

$$\dot{x} = J(x) \partial_x H^T + g(x)u, \quad (25)$$

$$y = g^T(x) \partial_x H^T. \quad (26)$$

Las variables de estado son $x \in \mathbb{R}^n$, con n arbitrario, no necesariamente par, y el único requerimiento sobre $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denominada matriz de estructura o de interconexión, es la antisimetría

$$J^T(x) = -J(x), \quad \forall x. \quad (27)$$

Las variables de puerto son $u, y \in \mathbb{R}^p$, con $p \leq n$, y $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la matriz de puertos. Las variables u e y forman un par pasivo con función de almacenamiento H . En efecto,

$$\dot{H} = \partial_x H \dot{x} = \partial_x H (J(x) \partial_x H^T + g(x)u) \stackrel{(27)}{=} \partial_x H g(x)u = (g^T(x) \partial_x H^T)^T u = y^T u. \quad (28)$$

Muchos sistemas físicos no conservan la energía en el dominio descrito por los mismos, tal como indica (28), sino que la disipan en el dominio térmico. En ciertos casos es posible incluir estos efectos disipativos en el formalismo presentado, y el tipo de sistema que se obtiene, denominado PHS con disipación, o PHDS, juega un papel importante en las técnicas de control asociadas. Supongamos que se separan las variables de puerto en dos grupos: los puertos *normales*, a los que seguiremos

designando igual, y los puertos disipativos, que designaremos con el subíndice R , con variables $u_R, y_R \in \mathbb{R}^r$. De esta manera, el término gu en (25) se convierte en

$$(g(x) \ g_R(x)) \begin{pmatrix} u \\ u_R \end{pmatrix} = g(x)u + g_R(x)u_R, \quad (29)$$

mientras que (26) pasa a ser

$$\begin{pmatrix} y \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^T(x) \\ g_R^T(x) \end{pmatrix} \partial_x H^T. \quad (30)$$

El siguiente paso es imponer en los puertos disipativos relaciones del tipo

$$u_R = -F_R(y_R), \quad (31)$$

siendo las funciones $F_R : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ tales que

$$-y_R^T u_R = y_R^T F_R(y_R) \geq 0. \quad (32)$$

Puesto que $y_R^T u_R$ es la potencia que entra en el sistema por estos puertos, la condición (32) indica que la potencia que sale del sistema por los mismos, $-y_R^T u_R$, es positiva, de manera que, efectivamente, las relaciones impuestas equivalen a *cerrar* los puertos con elementos disipativos. Aunque la propiedad de pasividad se mantiene en este caso general, en lo que sigue consideraremos sólo funciones F_R lineales

$$u_R = -S(x)y_R, \quad (33)$$

con $S(x)$ una matriz simétrica y semidefinida positiva, $S^T(x) = S(x) \geq 0$, $\forall x$, a la que se permite depender de las variables de estado. En el caso de los sistemas eléctricos, y considerando los $u_R = v$ como voltajes y las $y_R = i$ como corrientes, (33) es $v = -Ri$, con R la matriz de resistencias. El signo negativo corresponde al hecho de que las relaciones están escritas desde el punto de vista del resto del sistema; si v_r, i_r son los voltajes y corrientes con convenio de potencia de entrada en las resistencias, se tiene $v_r = v$ y $i_r = -i$, de manera que $v_r = Ri_r$.

Usando (33) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J\partial_x H^T + gu + g_R u_R = J\partial_x H^T + gu - g_R S y_R \\ &= J\partial_x H^T + gu - g_R S g_R^T \partial_x H^T = (J - R)\partial_x H^T + gu, \end{aligned} \quad (34)$$

donde

$$R(x) = g_R(x)S(x)g_R^T(x) \quad (35)$$

es también una matriz simétrica y semidefinida positiva. La estructura resultante

$$\dot{x} = (J(x) - R(x))\partial_x H^T + g(x)u, \quad (36)$$

$$y = g^T(x)\partial_x H^T, \quad (37)$$

se denomina PHDS explícito, y la matriz R es la matriz de disipación.⁵ Es inmediato demostrar que ahora

$$\dot{H} = u^T y - \partial_x H R \partial_x H^T \leq u^T y, \quad (38)$$

y que esta desigualdad actúa en el mismo sentido que la introducida por la acotación inferior de H , por lo que el par (u, y) continúa siendo pasivo con función de almacenamiento H .

Los PHDS explícitos permiten modelar una clase muy amplia de sistemas mecánicos, eléctricos, electromecánicos o hidráulicos, y constituyen la base de partida para los métodos de control asociados. El conjunto de sistemas que se pueden modelar en el formalismo se amplía por medio de las estructuras de Dirac, tal como se describe a continuación, y la extensión a sistemas más complejos, tales como sistemas descritos por ecuaciones en derivadas parciales o sistemas termodinámicos, se discute en la Sección 5.

Cabe indicar que un modelo idealizado de un sistema físico puede tener la forma dada por (36), (37) y, sin embargo, no ser pasivo por no satisfacer la acotación inferior de H (por ejemplo, una partícula interactuando en un campo gravitatorio de una masa puntual, lo que constituye una idealización, para la que la energía potencial no está acotada inferiormente). En el marco de la teoría de sistemas, la principal causa de no pasividad es la existencia de fuentes ideales (de voltaje, corriente, etc.), que permiten extraer cantidades infinitas de energía. Una ley de control implementada digitalmente puede dar lugar también a sistemas no pasivos, lo cual implica ciertos problemas prácticos de realización.

3.2. PHS GENERALIZADOS Y ESTRUCTURAS DE DIRAC

La principal limitación de (25) o (36) es el carácter explícito de las ecuaciones diferenciales. De hecho, es bien sabido, especialmente en el ámbito de la teoría de circuitos, que al conectar diversos subsistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias es posible que el sistema resultante no se pueda poner en forma explícita, resultando lo que se denomina un sistema algebraico-diferencial de ecuaciones (DAE). Usando el concepto de estructura de Dirac, se verá a continuación que la clase de los PHS explícitos se puede englobar en una clase más amplia que sí es cerrada respecto a las interconexiones que conservan la potencia.

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable de dimensión $n_{\mathcal{M}}$, y sea una carta local con coordenadas $x \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{M}}}$. Sea asimismo el espacio de puertos de entrada-salida $\mathcal{P}_B = \mathcal{F}_B \times \mathcal{E}_B$, con $\mathcal{E}_B = \mathcal{F}_B^*$, y consideremos finalmente la función hamiltoniana dada localmente por $H(x)$. Un sistema hamiltoniano con puertos (PHS) viene entonces definido por una estructura de Dirac $\mathcal{D}(x)$ para cada punto $x \in \mathcal{M}$, donde el espacio de flujos es

$$\mathcal{F} = T_x \mathcal{M} \times \mathcal{F}_B, \quad \dim \mathcal{F} = n_{\mathcal{M}} + n_B, \quad (39)$$

⁵De la misma manera que a partir de J puede definirse un paréntesis de Poisson, con $J - R$ puede construirse el denominado paréntesis de Leibniz (véase [19]).

con correspondiente espacio de esfuerzos $\mathcal{E} = T_x^*M \times \mathcal{E}_B$ y espacio de puertos $\mathcal{P} = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$, mediante

$$(-\dot{x}, f, \partial_x H^T, e) \in \mathcal{D}(x), \quad (f, e) \in \mathcal{F}_B \times \mathcal{E}_B. \quad (40)$$

La estructura de Dirac puede variar suavemente sobre \mathcal{M} , y por eso se habla a veces de estructuras de Dirac moduladas.

Usando la propiedad (D1) de estructura de Dirac

$$0 = \langle (\partial_x H^T, e) | (-\dot{x}, f) \rangle = -\partial_x H \dot{x} + e^T f = -\dot{H} + e^T f, \quad (41)$$

de donde se deduce el balance de potencia correcto $\dot{H} = e^T f$.

Para ver en qué circunstancias es posible obtener un PHS explícito, supongamos que tenemos una representación de núcleo de $\mathcal{D}(x)$,

$$F(x) \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ f \end{pmatrix} + E(x) \begin{pmatrix} \partial_x H^T \\ e \end{pmatrix} = 0, \quad (42)$$

donde $F(x)$ y $E(x)$ son matrices $n \times n$, $n = n_{\mathcal{M}} + n_B$, que satisfacen

$$F(x)E^T(x) + E(x)F^T(x) = 0, \quad \text{rang}(F(x)|E(x)) = n, \quad \forall x \in \mathcal{M}. \quad (43)$$

El PHS dado por (42) es un PHS explícito si es posible aislar \dot{x} . Supongamos que F y E se pueden descomponer (de manera no necesariamente única) como

$$F = (F_x \ F_{B1} \ F_{B2}), \quad E = (E_x \ E_{B1} \ E_{B2}), \quad (44)$$

con $n_B = n_{B1} + n_{B2}$, F_x, E_x $n \times n_x$, F_{B1}, E_{B1} $n \times n_{B1}$, y F_{B2}, E_{B2} $n \times n_{B2}$, de manera que

$$\text{rang } F_x = n_x \quad \text{y} \quad \text{rang}(F_x \ F_{B1} \ E_{B2}) = n. \quad (45)$$

Separando correspondientemente las componentes de f y e , podemos entonces escribir (42) como

$$(F_x \ F_{B1} \ E_{B2}) \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ f_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + (E_x \ E_{B1} \ F_{B2}) \begin{pmatrix} \partial_x H^T \\ e_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \equiv \tilde{F} \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ \tilde{f} \end{pmatrix} + \tilde{E} \begin{pmatrix} \partial_x H^T \\ \tilde{e} \end{pmatrix} = 0, \quad (46)$$

donde $\tilde{f} = (f_1^T \ e_2^T)^T$, $\tilde{e} = (e_1^T \ f_2^T)^T$ y las nuevas matrices mantienen la condición

$$\tilde{F} \tilde{E}^T + \tilde{E} \tilde{F}^T = 0, \quad (47)$$

pero ahora $\text{rang } \tilde{F} = n$. Utilizando \tilde{F}^{-1} se obtiene

$$\begin{pmatrix} -\dot{x} \\ \tilde{f} \end{pmatrix} = -\tilde{F}^{-1} \tilde{E} \begin{pmatrix} \partial_x H^T \\ \tilde{e} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Usando (47) puede demostrarse ver que la matriz en (48) es antisimétrica

$$\tilde{E}^T (F^{-1})^T = -\tilde{F}^{-1} \tilde{E}, \quad (49)$$

de manera que, escribiendo

$$\tilde{F}^{-1}(x)\tilde{E}(x) = \begin{pmatrix} J(x) & g(x) \\ -g^T(x) & -B(x) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

con J y B antisimétricas, resulta

$$\dot{x} = J(x)\partial_x H^T(x) + g(x)\tilde{e}, \quad (51)$$

$$\tilde{f} = g^T(x)\partial_x H(x)^T + B(x)\tilde{e}, \quad (52)$$

que tiene la forma de un PHS explícito con un término de salida directa adicional, que es fácil ver que no destruye la pasividad del par $(u = \tilde{e}, y = \tilde{f})$.

Una de las propiedades más importantes de los PHS es la que establece que la conexión de dos PHS mediante relaciones entre las variables de puerto implementadas por medio de una estructura de Dirac es de nuevo un PHS.

TEOREMA. *Sean dos PHS definidos en variedades con coordenadas locales x_1, x_2 , hamiltonianos $H_1(x_1)$, $H_2(x_2)$, y variables de puerto (e_1, f_1) , (e_2, f_2) , respectivamente, mediante estructuras de Dirac*

$$(-\dot{x}_1, f_1, \partial_{x_1} H_1^T, e_1) \in \mathcal{D}_1(x_1), \quad (-\dot{x}_2, f_2, \partial_{x_2} H_2^T, e_2) \in \mathcal{D}_2(x_2), \quad (53)$$

de dimensiones n_1, n_2 respectivamente. Supongamos que en el espacio total de puertos se define un conjunto de n_c relaciones de conexión por medio de una estructura de Dirac $\mathcal{D}_c \subset \mathcal{F}_1 \times \mathcal{E}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{E}_2$. El sistema resultante tiene entonces $n_{B_1} + n_{B_2} - n_c$ puertos y es también un PHS.

La demostración puede encontrarse en [7]. Hay que remarcar que el sistema resultante puede no ser explícito, aunque los sistemas que lo componen lo sean.

3.3. EJEMPLOS DE INTERCONEXIÓN DE PHS

Como primer ejemplo, consideremos la interconexión completa de dos sistemas PHS explícitos Σ_1 y Σ_2 sin término adicional de salida directa, con ecuaciones respectivas

$$\dot{x}_i = J_i(x_i)\partial_{x_i} H_i^T + g_i(x_i)u_i, \quad y_i = g_i^T(x_i)\partial_{x_i} H_i^T, \quad (54)$$

para $i = 1, 2$, y donde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $u_i, y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$. Enlazamos entonces los dos sistemas mediante una realimentación lineal pero modulada arbitrariamente por los estados

$$u_1 = -K(x_1, x_2)y_2, \quad u_2 = K^T(x_1, x_2)y_1, \quad K(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_2} \quad \forall x_1, x_2, \quad (55)$$

tal como muestra el diagrama de bloques de la Figura 2.

Estas relaciones definen una estructura de Dirac en el espacio total de puertos $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2p_1+2p_2}$, dada por

$$\mathcal{D}_c = \{(u_1^T \ y_1^T \ u_2^T \ y_2^T)^T \in \mathcal{P} \mid u_1 = -Ky_2, \ u_2 = K^T y_1\}. \quad (56)$$

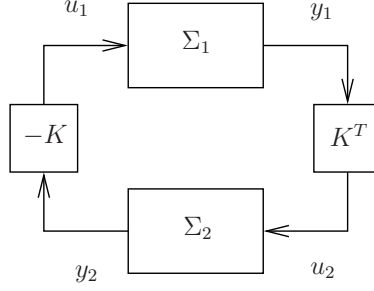


Figura 2: Interconexión de dos sistemas mediante realimentación modulada.

Efectivamente, las relaciones de interconexión pueden escribirse como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & K \\ -K^T & 0 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (57)$$

y se tiene que $FE^T + EF^T = F + F^T = 0$, y que $\text{rang}(F|E) = \text{rang}(E) = p_1 + p_2$. Usando (55) en (54) para eliminar las variables de puerto se obtiene, efectivamente, un nuevo PHS (sin puertos) con variables de estado x_1, x_2 , hamiltoniano $H = H_1 + H_2$ y matriz de estructura

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & -g_1 K g_2^T \\ g_2 K^T g_1^T & J_2 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

que es evidentemente antisimétrica. El ejemplo se puede generalizar al caso en que la interconexión no sea completa, de manera que queden puertos de entrada-salida en el sistema resultante.

Como segundo ejemplo trataremos el circuito de la Figura 3. Los 5 elementos independientes constituyen un espacio de puertos $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{10}$, con variables $i_1, i_2, i_3, I_1, I_2, v_1, v_2, v_3, V_1, V_2$. La energía de un condensador es función de su carga, y las relaciones que se establecen entre las variables de puerto son

$$\dot{q}_j = i_j, \quad v_j = \partial H_j(q_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (59)$$

donde se ha usado el hecho de que el voltaje en un condensador es la derivada de su energía respecto a la carga; en el caso lineal, $H(q) = \frac{1}{2C}q^2$, donde C es la capacidad del condensador, y $v = q/C$. Obsérvese que cada condensador es un PHS con un solo estado, $q \in \mathbb{R}$, $J = 0$ y $g = 1$. Para inductores, el estado es el flujo magnético λ , que obedece $\dot{\lambda} = v$, con variable de salida la corriente $i = \partial_\lambda H$; en el caso lineal, $H(\lambda) = \frac{1}{2L}\lambda^2$, con L la autoinductancia.

La interconexión de los PHS de los condensadores y los puertos libres viene dada por las leyes de Kirchhoff

$$V_1 + v_1 = 0, \quad v_1 + v_3 = v_2, \quad V_2 + v - 2 = 0, \quad i_1 = i_3 + I_1, \quad I_2 = i_2 + i_3, \quad (60)$$

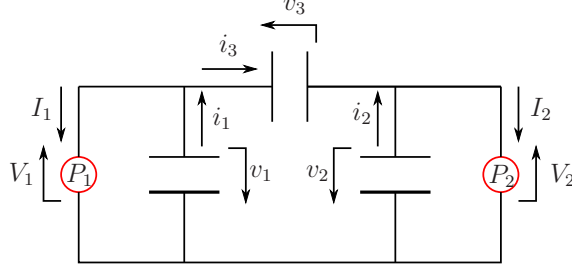


Figura 3: Circuito con tres condensadores en un lazo y dos puertos. El sistema resultante impone una relación algebraica entre las variables de estado.

las cuales, como ya se ha dicho, establecen una estructura de Dirac en \mathcal{P} . Efectivamente, las relaciones anteriores pueden escribirse en representación de núcleo como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (61)$$

Es inmediato comprobar que $EF^T + FE^T = 0$ y que $\text{rang}(E|F) = 5$. Las variables de estado son las cargas de los condensadores, q_j , $j = 1, 2, 3$, y la energía del sistema es

$$H(q_1, q_2, q_3) = H_1(q_1) + H_2(q_2) + H_3(q_3). \quad (62)$$

Substituyendo (59) en las leyes de Kirchhoff (61) se obtiene un PHS implícito, en el que no se pueden aislar las tres \dot{q}_j , debido a que las tres primeras columnas de F tienen rango 2. Las cinco ecuaciones son

$$\dot{q}_1 - \dot{q}_3 = I_1, \quad \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = I_2, \quad V_1 = -\partial H_1, \quad V_2 = -\partial H_2, \quad (63)$$

junto con la ligadura

$$\partial H_1 - \partial H_2 + \partial H_3 = 0. \quad (64)$$

La última ecuación define una subvariedad de \mathbb{R}^3 donde transcurre la dinámica; de hecho, puede verse que la invariancia temporal de esta subvariedad proporciona la componente no determinada del campo vectorial. Escogiendo variables adecuadas sobre esta subvariedad, el sistema 2-dimensional resultante puede ponerse en forma de PHS explícito.

4. CONTROL DE SISTEMAS HAMILTONIANOS CON PUERTOS

Sea el PHDS explícito

$$\dot{x} = (J(x) - R(x))\partial_x H^T + g(x)u, \quad y = g^T(x)\partial_x H^T, \quad (65)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^p$. Si la entrada en el sistema es nula, $u = 0$, se tiene que

$$\dot{H} = -\partial_x H R \partial_x H^T \leq 0 \quad (66)$$

y, por el teorema de LaSalle [15], las trayectorias⁶ tenderán hacia el mayor conjunto invariante contenido en $\Omega_{R,H} = \{\partial_x H R \partial_x H^T = 0\}$. En particular, si $R > 0$, entonces los puntos de $\Omega_{R,H}$ satisfacen $\partial_x H^T = 0$, los cuales, si $u = 0$, son invariantes. Si H tiene un único mínimo en x^* , las trayectorias dinámicas tenderán a x^* .

En general, el mínimo de H no es el punto en el que interesa que el sistema se estabilice en las aplicaciones; el problema que la teoría de control quiere resolver es proporcionar $u(t)$ en función de $x(t)$, o de $y(t)$, y de señales de referencia, de manera que $x(t)$ o $y(t)$ tengan el comportamiento adecuado, y ello, en general, en presencia de parámetros del sistema con valores inciertos y con posibles comportamientos dinámicos no modelados y señales externas no controlables. El problema más habitual es el de *regulación*, en el que se quiere que $x(t) \rightarrow x_d$, con x_d prefijado.

4.1. IDA-PBC

Si cerramos el lazo de control por medio de

$$u(t) = \beta(x(t)), \quad (67)$$

el sistema resultante es

$$\dot{x} = (J(x) - R(x))\partial_x H + g(x)\beta(x). \quad (68)$$

Los métodos de control naturales para PHDS se basan en conseguir que el sistema en lazo cerrado sea de nuevo un PHDS pero con las características adecuadas. Aunque se han desarrollado distintas aproximaciones (véase [22, 23]), la técnica que ha sido aplicada con más éxito es el denominado control IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment – Passivity-Based Control*), o su variante SIDA-PBC (por *Simultaneous IDA-PBC*⁷). De acuerdo con IDA-PBC, el sistema en lazo cerrado es de la forma

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x))\partial_x H_d, \quad (69)$$

donde $J_d(x)$ y $R_d(x)$ son las nuevas matrices de interconexión y de disipación, respectivamente, y obedecen por lo tanto $J_d = -J_d^T$ y $R_d^T = R_d \geq 0$, y $H_d(x)$ es el nuevo hamiltoniano, que en los problemas de regulación debe tener un único mínimo en x_d . Igualando (68) y (69) se obtiene

$$(J(x) - R(x))\partial_x H + g(x)\beta(x) = (J_d(x) - R_d(x))\partial_x H_d. \quad (70)$$

Parte de las ecuaciones en (70) determinan $u = \beta(x)$ una vez se ha calculado J_d , R_d y H_d , y el resto son ecuaciones no triviales que deben satisfacerse mediante una

⁶El teorema requiere que las trayectorias empiecen en un conjunto compacto positivamente invariante, la existencia del cual se puede demostrar en muchos casos de interés.

⁷Véase C. Batlle, A. Dòria-Cerezo, G. Espinosa y R. Ortega en [4].

adecuada elección de J_d , R_d y H_d . Esto puede formalizarse mediante la actuación del aniquilador de rango completo por la izquierda de $g(x)$, $g^\perp(x)$, tal que $g^\perp(x)g(x) = 0$ y $\text{rang } g^\perp(x) = n - p$. Se llega entonces a la denominada *matching equation*

$$g^\perp(x)((J(x) - R(x))\partial_x H) = g^\perp(x)((J_d(x) - R_d(x))\partial_x H_d). \quad (71)$$

El sistema (71) puede resolverse con distintas estrategias. Por ejemplo, puede fijarse H_d *a priori*, con el mínimo en x_d , y se tiene entonces un sistema algebraico para J_d y R_d , o puede escogerse J_d y R_d y se obtiene un sistema de EDP para H_d . Es posible también plantearse una estrategia mixta en la que, basándose en razonamientos específicos para el sistema, se fije parte de la dependencia de H_d en x y parte de las componentes de J_d y R_d ; las distintas posibilidades se discuten, por ejemplo, en [20]. En cualquier caso, si se consigue resolver la *matching equation* la función H_d constituye una función de Lyapunov (si $R_d > 0$) o, si tan solo se tiene $R_d \geq 0$, una función a la que se puede aplicar el teorema de LaSalle; la estabilidad de x_d está entonces automáticamente demostrada.

4.2. CONTROL DE UN ACTUADOR ELECTROSTÁTICO POR MEDIO DE IDA-PBC

Como ejemplo de aplicación de IDA-PBC, consideremos un actuador electrostático formado por un condensador plano, una de cuyas placas puede moverse y está sujeta a la fuerza de recuperación de un muelle y a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad. En términos del desplazamiento z respecto a la separación de placas d para la que le muelle no ejerce fuerza, de manera que $d - z > 0$ es la separación entre placas, la cantidad de movimiento $p = v/M$ de la placa, donde $v = \dot{z}$ y M es la masa total de las partes movibles, y la carga q del condensador, las ecuaciones del movimiento de este sistema electromecánico son

$$\dot{z} = \frac{1}{M}p, \quad (72)$$

$$\dot{p} = -kz + \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon A} - \frac{B}{M}p, \quad (73)$$

$$\dot{q} = i, \quad (74)$$

donde k es la constante del muelle, B el coeficiente de rozamiento viscoso, ϵ la constante dieléctrica del medio y A la superficie de las placas del condensador (véase [11] para más detalles sobre el modelo). La corriente i que se introduce en el condensador actúa como variable de control.

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma PHS

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_J - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_R \right] \begin{pmatrix} \partial_z H \\ \partial_p H \\ \partial_q H \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_g i \quad (75)$$

con el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2} \frac{d-z}{\epsilon A} q^2. \quad (76)$$

Nótese que la capacidad del condensador, $C(z) = \epsilon A/(d-z)$ depende del estado. Nuestro objetivo de control es conseguir que la distancia entre placas sea $d - z^*$, es decir, $z = z^*$ (para conseguir un punto de equilibrio debe ser $z^* > 0$ debido a que la fuerza electrostática entre las placas es atractiva). Imponiendo este valor como punto de equilibrio del sistema, se obtienen las otras dos componentes $p^* = 0$ y $q^* = \sqrt{2\epsilon A k z^*}$, así como el valor en equilibrio del control, $i^* = 0$.

El sistema (70) es, con $x = (z \ p \ q)^T$,

$$(J - R)\partial_x H + gi = (J_d - R_d)\partial_x H_d. \quad (77)$$

En componentes, poniendo $R_d = \text{diag}(R_{11}, R_{22}, R_{33})$ y J_d la matriz antisimétrica con elementos J_{12} , J_{13} y J_{23} en el triángulo superior estricto,

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

se obtiene

$$\frac{1}{M}p = -R_{11}\partial_z H_d + J_{12}\partial_p H_d + J_{13}\partial_q H_d, \quad (79)$$

$$-kz + \frac{q^2}{2\epsilon A} - \frac{B}{M}p = -R_{22}\partial_p H_d - J_{12}\partial_z H_d + J_{23}\partial_q H_d, \quad (80)$$

$$i = -R_{33}\partial_q H_d - J_{13}\partial_z H_d - J_{23}\partial_p H_d. \quad (81)$$

Adoptamos un método puramente algebraico, y fijamos un H_d que tenga el (único) mínimo en el punto deseado; lo más sencillo consiste en usar un hamiltoniano cuadrático en los errores,

$$H_d(z, p, q) = \frac{1}{2}a(z - z^*)^2 + \frac{1}{2}bp^2 + \frac{1}{2}c(q - q^*)^2, \quad (82)$$

donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ son parámetros libres. Se obtiene entonces

$$\frac{1}{M}p = -R_{11}a(z - z^*) + J_{12}bp + J_{13}c(q - q^*), \quad (83)$$

$$-kz + \frac{q^2}{2\epsilon A} - \frac{B}{M}p = -R_{22}bp - J_{12}a(z - z^*) + J_{23}c(q - q^*), \quad (84)$$

conjuntamente con la ecuación que proporciona la señal de control

$$i = -R_{33}c(q - q^*) - J_{13}a(z - z^*) - J_{23}bp. \quad (85)$$

Las ecuaciones (83) y (84) se deben satisfacer en todo el espacio de estados escogiendo valores adecuados de J_{12} , J_{13} , J_{23} , que pueden ser constantes o depender

del estado, de R_{11} , R_{22} , R_{33} (también constantes o no pero no negativas en cualquier caso), y de a , b y c , que deben ser constantes positivas. La estrategia es escoger todos estos valores de manera que la dependencia en las variables de estado en ambos miembros de (83) y (84) se cancele. Resulta que una tal elección viene dada por

$$J_{12}b = \frac{1}{M}, \quad \frac{B}{M} = R_{22}b, \quad R_{11} = 0, \quad J_{13} = 0, \quad J_{23}c = \frac{q}{2\epsilon A} + \frac{q^*}{2\epsilon A}, \quad J_{12}a = k. \quad (86)$$

En resumen, el sistema en lazo cerrado es un PHS con

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{bM} & 0 \\ -\frac{1}{bM} & 0 & \frac{q+q^*}{2\epsilon A} \\ 0 & -\frac{q+q^*}{2\epsilon A} & 0 \end{pmatrix}, \quad R_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{bM} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix}, \quad (87)$$

y hamiltoniano dado por (82), y el control que lo consigue es

$$i(q, p) = -R_{33}c(q - q^*) - \frac{q + q^*}{2\epsilon A}p, \quad (88)$$

donde $R_{33} > 0$ y $c > 0$ son parámetros libres que pueden ajustarse para conseguir mejores transitorios hacia el punto de equilibrio. El ejemplo considerado ilustra algunas características generales del método (S)IDA-PBC, pero hay que señalar que, desde el punto de vista de la teoría de control, el resultado obtenido no es demasiado satisfactorio, ya que la señal de control (88) depende de variables de estado difíciles de medir, como son q y p , y además contiene, explícitamente o a través de q^* , parámetros cuyo valor puede que no sea conocido con exactitud en la práctica.

5. DESARROLLOS RECIENTES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Durante los últimos años, el modelado y control basados en PHS han sido usados en numerosos ámbitos y se han propuesto nuevos desarrollos teóricos [4]. Algunos campos de aplicación son, por ejemplo, los sistemas electromecánicos [3], los sistemas de electrónica de potencia [2], los sistemas mecánicos [28], los sistemas robóticos [9], o los sistemas teleoperados [27]. En [5] se presentan resultados recientes que utilizan de manera fundamental las estructuras de Dirac para estudiar los sistemas que se pueden obtener en lazo cerrado.

Utilizando la caracterización (D3) de las estructuras de Dirac, el modelado PHS se ha extendido a los sistemas de parámetros distribuidos, es decir, aquéllos descritos por sistemas de EDP, que interaccionan con el entorno. Se obtiene lo que se denomina una estructura de Dirac-Stokes [26], y algunos ejemplos de aplicación incluyen la teoría de circuitos distribuidos, las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones de la dinámica de fluidos; una aplicación más reciente incluye la descripción de elementos elásticos en robótica [17]. Los sistemas descritos por PHS distribuidos necesitan ser discretizados en el espacio a fin de poder realizar simulaciones. En [13] se propone un método de discretización cuyo resultado es un PHS de dimensión finita, y que tiene relación con ciertas técnicas de elementos finitos. La aplicación de estas técnicas de discretización a sistemas relevantes es un campo abierto de investigación.

Un desarrollo conceptual importante es el que se refiere a la descripción de procesos irreversibles. En el marco PHS presentado aquí, los elementos disipativos se añaden *a posteriori* y la energía correspondiente desaparece del sistema, pasando al dominio térmico, el cual no es descrito por el formalismo. De hecho, las estructuras de Dirac, al establecer relaciones lineales en el espacio de puertos, no son suficientes para describir la irreversibilidad, la cual introduce, por ejemplo, relaciones no lineales entre temperaturas absolutas y flujos de entropía. En [10] se demuestra que las herramientas adecuadas son las llamadas estructuras de contacto, las cuales permiten definir los sistemas de control de contacto conservativos, que incluyen como caso particular los PHS. La modelización de procesos de ingeniería química es un campo que puede beneficiarse de estos avances.

Otras líneas de investigación activas son las mejoras de las técnicas IDA-PBC y derivadas para hacer frente a sistemas con parámetros indeterminados, o la aplicación de algoritmos de reducción de orden sobre modelos PHS de gran dimensión, obtenidos, por ejemplo, mediante la interconexión de muchos submodelos semejantes y a fin de obtener modelos reducidos, también PHS, sobre los que poder aplicar las técnicas de control.

AGRADECIMIENTOS. El trabajo de CB y AD-C ha sido financiado en parte por MTM2007-62480 y DPI2007-62582, respectivamente. Los autores quieren agradecer al profesor Antoni Ras (UPC) su valiosa lectura del manuscrito.

REFERENCIAS

- [1] V.I. ARNOLD, *Mecánica clásica. Métodos matemáticos*, Paraninfo, Madrid, 1983.
- [2] C. BATLLE, A. DÒRIA-CEREZO Y E. FOSSAS, Bidirectional power flow control of a power converter using passive Hamiltonian techniques, *International J. of Circuit Theory and Applic.* **36** (2008), 769–788.
- [3] C. BATLLE, A. DÒRIA-CEREZO Y R. ORTEGA, Power flow control of a doubly-fed induction machine coupled to a flywheel, *European J. of Control* **11** (2005), 209–221.
- [4] F. BULLO Y K. FUJIMOTO (EDS.), *Lagrangian and Hamiltonian methods for nonlinear control 2006, Lecture Notes in Control and Information Sciences* **366**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [5] J. CERVERA, A. VAN DER SCHAFT Y A. BAÑOS, Interconnection of port-Hamiltonian systems and composition of Dirac structures, *Automatica* **43** (2007), 212–225.
- [6] T. COURANT, Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** (1990), 631–661.
- [7] M. DALSMO Y A. VAN DER SCHAFT, On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems, *SIAM J. Control Optimiz.* **37** (1999), 54–91.
- [8] I. DORFMAN, *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*, Wiley, Chichester (UK), 1993.

- [9] V. DUINDAM Y S. STRAMIGIOLI, Singularity-free dynamic equations of open-chain mechanisms with general holonomic and nonholonomic joints, *IEEE Trans. on Robotics* **24** (2008), 517–526.
- [10] D. EBERARD, B. MASCHKE Y A. VAN DER SCHAFT, An extension of Hamiltonian systems to the thermodynamic phase space: towards a geometry of nonreversible processes, *Rep. on Math. Phys.* **60** (2007), 175–198.
- [11] A. FARGAS, R. COSTA Y A.M. SHKEL *Modeling the electrostatic actuation of mems: state of the art 2005*, informe IOC-UPC y University of California at Irvine, IOC-DT-P-2005-18, 2005. URL: <http://hdl.handle.net/2117/119>.
- [12] G. GOLO, A. VAN DER SCHAFT, P.C. BREEDVELD Y B.M. MASCHKE, Implicit Hamiltonian formulation of bond graphs, en *Nonlinear and Hybrid Systems in Automotive Control*, R. Johansson y A. Rantzer (eds.), Springer (Londres), 2003, 351–372.
- [13] G. GOLO, V. TALASILA, A. VAN DER SCHAFT Y B. MASCHKE, Hamiltonian discretization of boundary control systems, *Automatica* **40** (2004), 757–771.
- [14] D.C. KARNOPP, D.L. MARGOLIS Y R.C. ROSENBERG, *System Dynamics. Modeling and Simulation of Mechatronic Systems (4th edition)*, Wiley, Hoboken (NJ), 2006.
- [15] H.K. KHALIL, *Nonlinear systems*, Prentice-Hall, Upper Saddle River (NJ), 1996.
- [16] A. KUGI, *Non-linear control based on physical models*, Springer-Verlag, London, 2001.
- [17] A. MACCHELLI, C. MELCHIORRI Y S. STRAMIGIOLI, Port-based modeling of a flexible link, *IEEE Trans. on Robotics* **23** (2007), 650–660.
- [18] B.M. MASCHKE, A. VAN DER SCHAFT Y P.C. BREEDVELD, An intrinsic Hamiltonian formulation of the dynamics of LC-circuits, *IEEE Trans. Circ. and Syst. I* **42** (1995), 73–82.
- [19] J.-P. ORTEGA Y V. PLANAS-BIELSA, Dynamics on Leibniz manifolds, *J. Geom. Phys.* **52** (2004), 1–27.
- [20] R. ORTEGA Y E. GARCÍA-CANSECO, Interconnection and damping assignment passivity-based control: a survey, *European J. of Control* **10** (2004), 432–450.
- [21] R. ORTEGA, A. LORIA, P.J. NICKLASSON Y H.J. SIRA-RAMÍREZ, *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*, Springer-Verlag, London, 1998.
- [22] R. ORTEGA, A. VAN DER SCHAFT, I. MAREELS Y B.M. MASCHKE, Putting energy back in control, *Control Syst. Magazine* **21** (2001), 18–33.
- [23] R. ORTEGA, A. VAN DER SCHAFT, B.M. MASCHKE, Y G. ESCOBAR, Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems, *Automatica* **38** (1995), 585–596.
- [24] A. VAN DER SCHAFT, *L₂-gain and passivity techniques in nonlinear control*, Springer-Verlag, London, 2000.
- [25] A. VAN DER SCHAFT Y B.M. MASCHKE, Mathematical modelling of constrained Hamiltonian systems, en *Proc. IFAC Symp. NOLCOS*, Tahoe City (CA), 1995, International Federation of Automatic Control, 678–683.

- [26] A. VAN DER SCHAFT Y B.M. MASCHKE, Hamiltonian formulation of distributed parameter systems with boundary energy flow, *J. Geom. Phys.* **42** (2002), 166–194.
- [27] S. STRAMIGIOLI, A. VAN DER SCHAFT, B. MASCHKE Y C. MELCHIORRI, Geometric scattering in robotic telemanipulation, *IEEE Trans. on Robotics and Automation* **18** (2002), 588–596.
- [28] G. VIOLA, R. ORTEGA, R. BANAVAR, J. ACOSTA Y A. ASTOLFI, Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes, *IEEE Trans. Aut. Control* **52** (2007), 1093–1099.

CARLES BATLLE, EPSEVG, DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA 4 Y IOC, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Correo electrónico: carles.batlle@upc.edu

Página web: <http://www-ma4.upc.edu/~carles/>

ARNAU DÒRIA-CEREZO, EPSEVG, DEPARTAMENT D'ENGINYERIA ELÈCTRICA Y IOC, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Correo electrónico: arnau.doria@upc.edu